

PROCESAREA SEMNALELOR - CURS 12

SERII DE TIMP - PROCESE GAUSSIENE

Cristian Rusu

CUPRINS

- procese Gaussiene (PG)
- matrice de covarianță și matrice kernel
- operații care păstrează proprietatea psd (pozitiv semidefinită)
- regresie cu procese Gaussiene

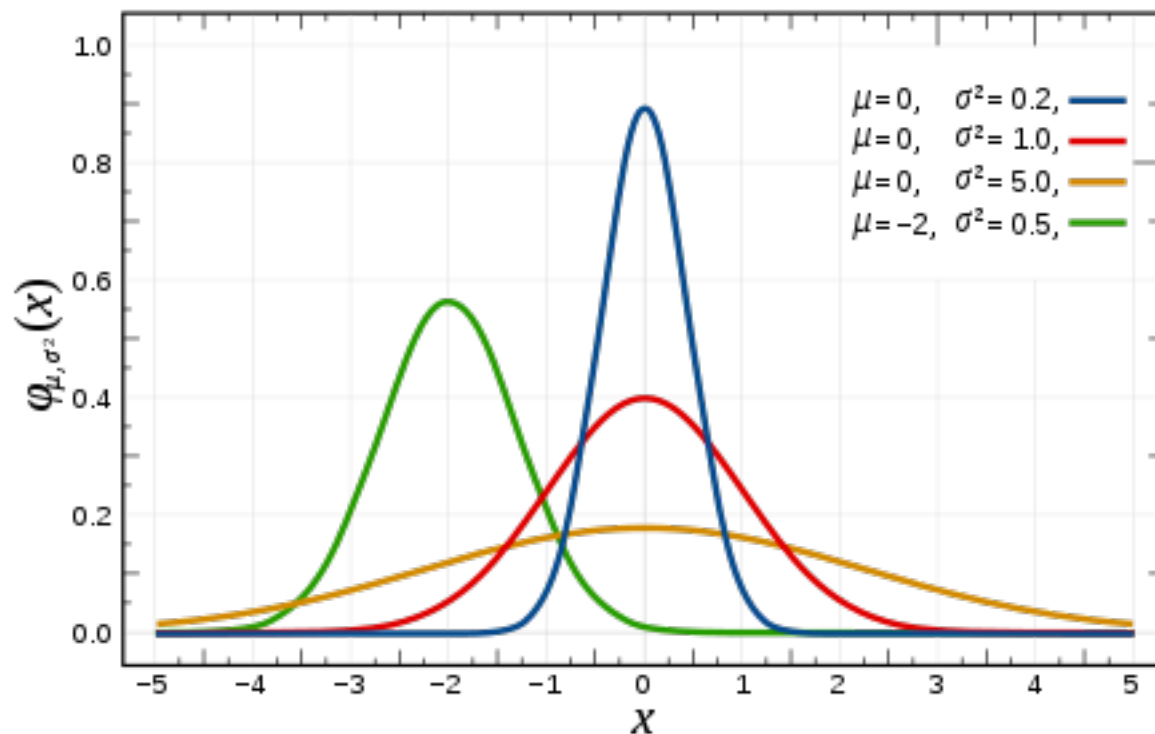
PROCESE GAUSSIENE (PG)

- **procese stochastice:** o colecție de variabile aleatoare care poartă informație despre timp/spațiu (serii de timp aleatoare)
- PG sunt procese stochastice care au proprietatea că orice colecție finită (sau eșantionare finită) de variabile aleatoare are o **distribuție Gaussiană** (în general multivariată)
- **definiția matematică:** Pentru orice set S , un PG pe S este un set de variabile aleatoare $\{Z_t \mid t \in S\}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și pentru orice $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \in S$ avem că vectorul $[Z_{t_1} \ Z_{t_2} \ \dots \ Z_{t_n}]$ este eșantionat din distribuție Gaussiană
- exemple din lumea reală:
 - mișcări aleatoare: mișcarea Browniană, drumuri aleatoare (random walks)
 - semnale audio și video
 - semnale biologice/medicale colectate (EKG, EEG, etc.)
 - cotațiile acțiunilor pe bursă

REVIEW DISTRIBUȚIA GAUSSIANĂ

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

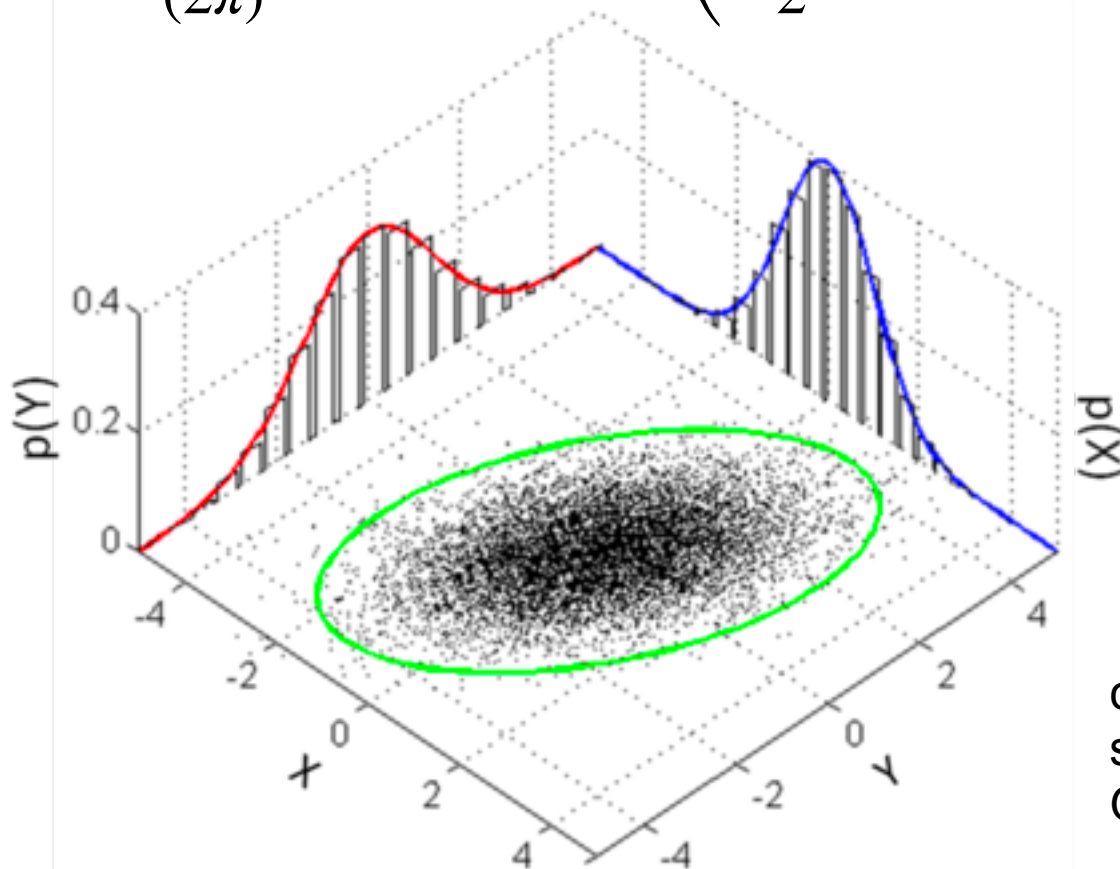
$$\mathcal{N}(\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu)\right)$$



REVIEW DISTRIBUȚIA GAUSSIANĂ

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

$$\mathcal{N}(\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu)\right)$$

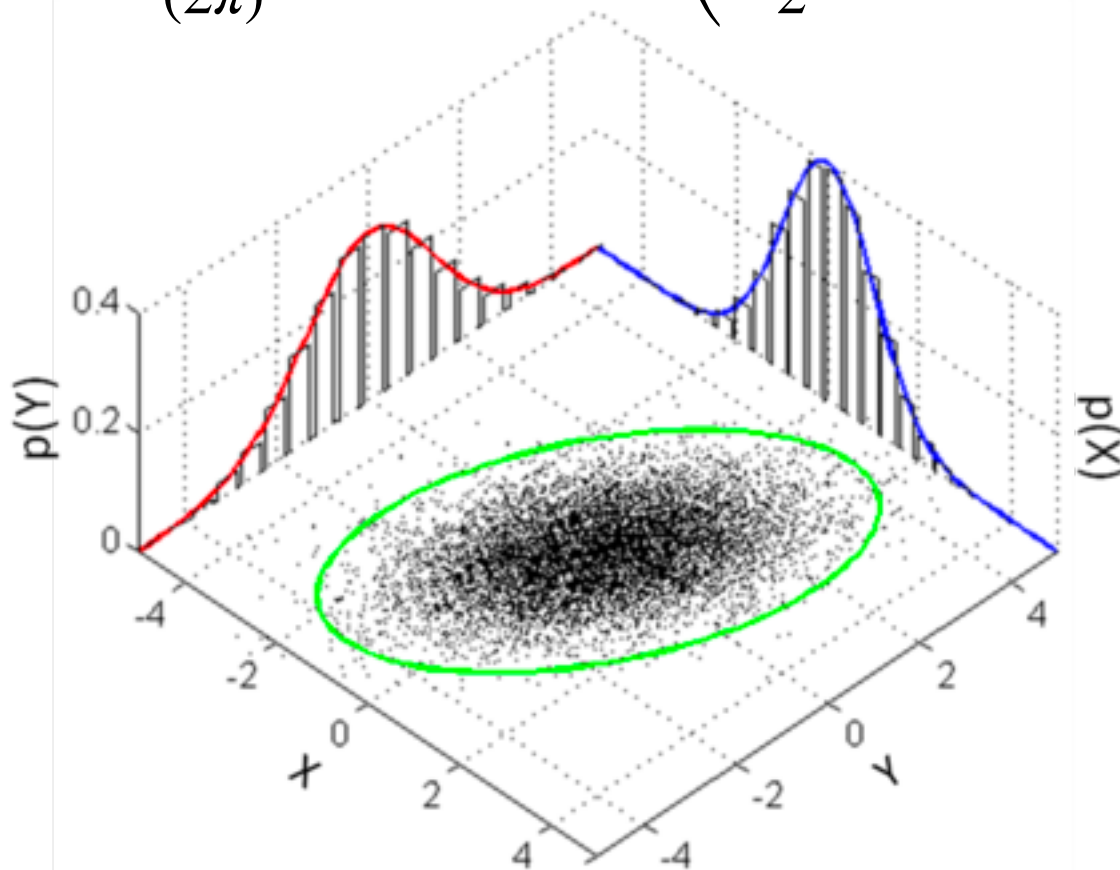


câți parametri
sunt într-o
Gaussiană?

REVIEW DISTRIBUȚIA GAUSSIANĂ

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

$$\mathcal{N}(\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu)\right)$$

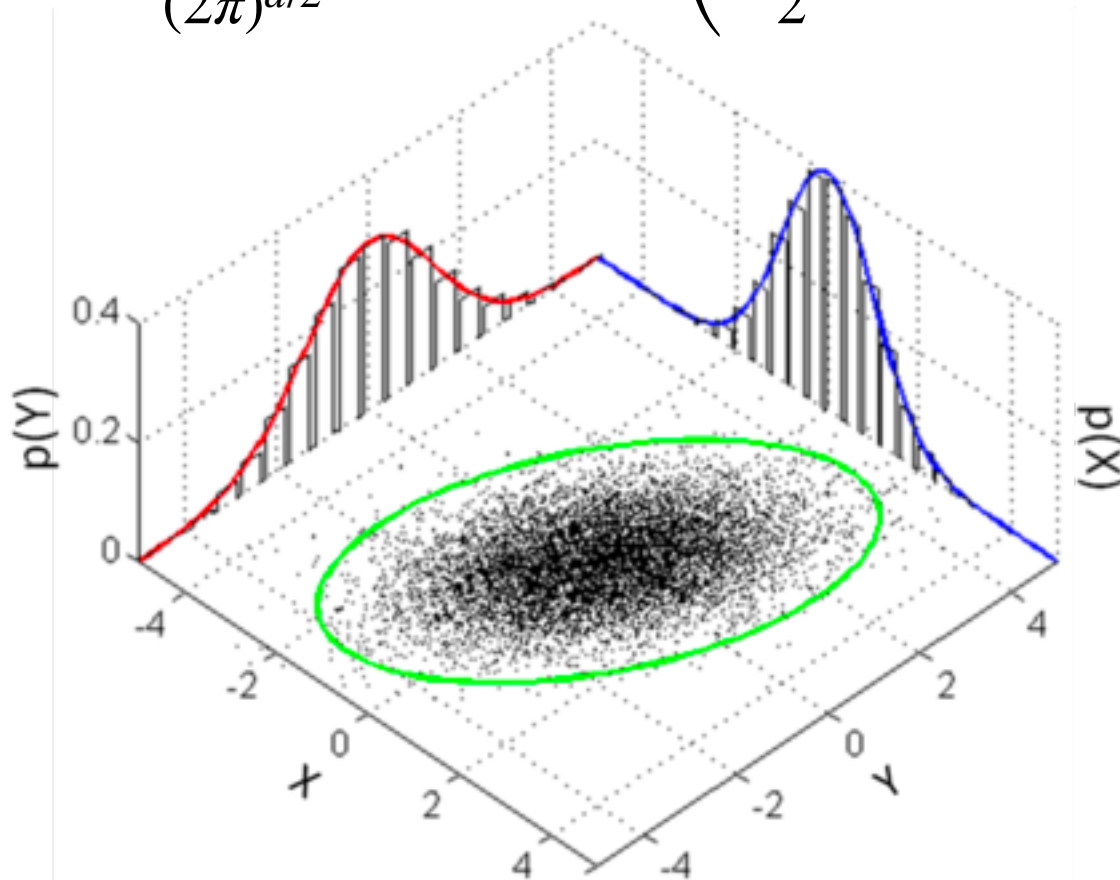


$$\approx d + d^2/2$$

REVIEW DISTRIBUȚIA GAUSSIANĂ

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

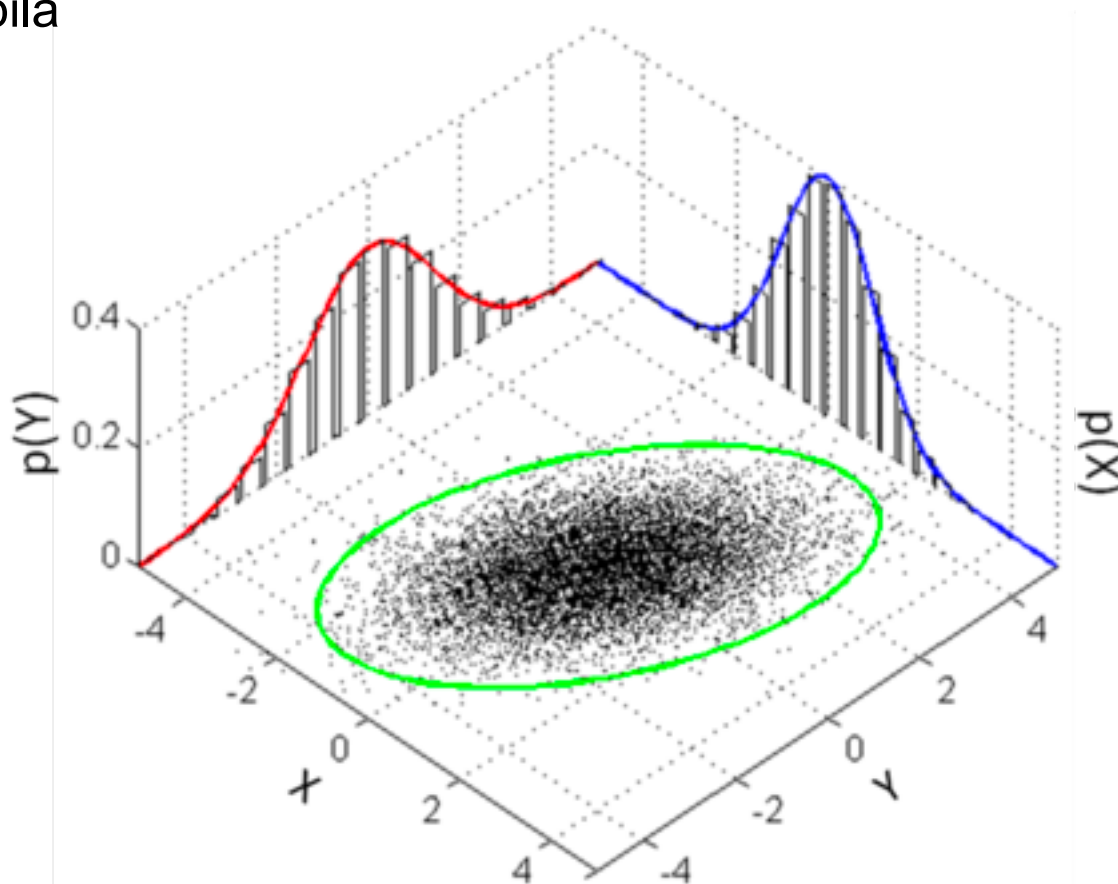
$$\mathcal{N}(\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu)\right)$$



REVIEW DISTRIBUȚIA GAUSSIANĂ

$$\mathcal{N}(\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu)\right)$$

- Σ trebuie să fie simetrică și pozitiv definită (pd) = pozitiv semidefinită + inversabilă



REVIEW DISTRIBUȚIA GAUSSIANĂ

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

- $\boldsymbol{\Sigma}$ trebuie să fie simetrică și pozitiv definită (pd) = pozitiv semidefinită + inversabilă
 - toate valorile proprii sunt pozitive
 - $\mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x}$
 - toți determinanții principali sunt pozitivi
 - matricea are structura $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$
 - ...

REVIEW DISTRIBUȚIA GAUSSIANĂ

- vi se dă $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, cum eșantionați din această distribuție?

REVIEW DISTRIBUȚIA GAUSSIANĂ

- vi se dă $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, cum eșantionați din această distribuție?
 - pasul 1: $\Sigma = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T$ (descompunerea valorilor proprii)
 - pasul 2: $\mathbf{x} = \mathbf{U}\sqrt{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{n} + \mu$, $\mathbf{n} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I})$
 - deci $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$

PROCESE GAUSSIENE (PG)

- primul exemplu: linii generate aleator
 - linii care trec prin origine
 - $S \equiv \mathbb{R}$, $z_t = tw$, $w \sim \mathcal{N}(0,1)$

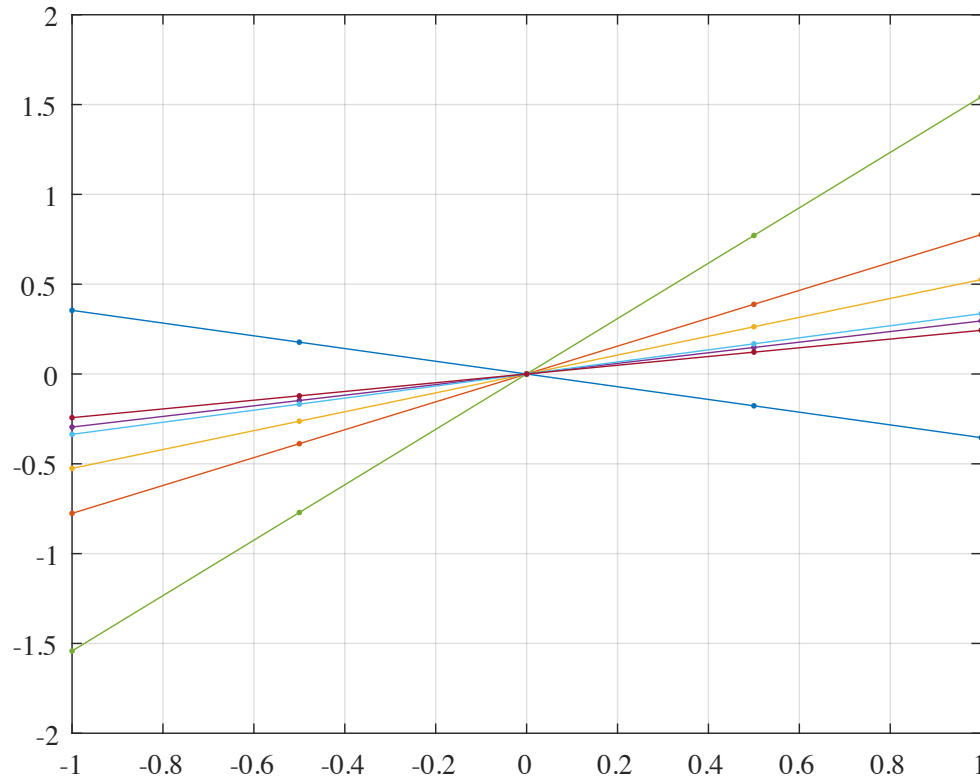
- de ce este PG?

$$\bullet \begin{bmatrix} z_{t_1} \\ z_{t_2} \\ \vdots \\ z_{t_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 w \\ t_2 w \\ \vdots \\ t_n w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} w = \mathbf{a}w$$

- o combinație liniară de variabile Gaussiene este o Gaussiană

PROCESE GAUSSIENE (PG)

- primul exemplu: linii generate aleator
 - linii care trec prin origine
 - $S \equiv \mathbb{R}$, $z_t = tw$, $w \sim \mathcal{N}(0,1)$
- cum arată grafic acest PG?



PROCESE GAUSSIENE (PG)

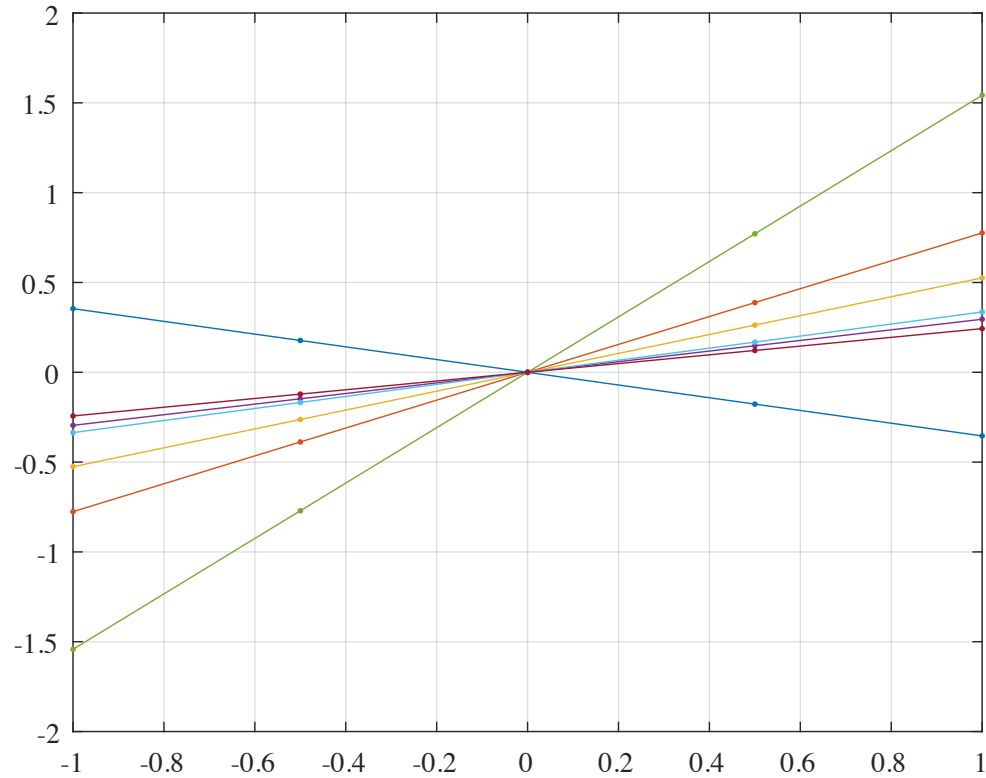
- matrice de covarianță, exemple:
 - liniar: $S = \mathbb{R}^d$, $\mu(x) = 0$, $k(x, y) = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$
 - mișcare Browniană: $S = [0, \infty]$, $\mu(t) = 0$, $k(s, t) = \min\{s, t\}$
 - exponențiala pătrată:
 $S = \mathbb{R}^d$, $\mu(x) = 0$, $k(x, y) = \exp(-\alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2)$, $\alpha > 0$
 - Ornstein-Uhlenbeck:
 $S = [0, \infty]$, $\mu(t) = 0$, $k(s, t) = \exp(-\alpha |s - t|)$, $\alpha > 0$
 - periodic:
 $S = \mathbb{R}$, $\mu(x) = 0$, $k(x, y) = \exp(-\alpha \sin^2(\beta\pi(x - y)))$, $\alpha, \beta > 0$
 - simetric:
 $S = \mathbb{R}$, $\mu(x) = 0$, $k(x, y) = \exp(-\alpha(\min\{|x - y|, |x + y|\})^2)$, $\alpha > 0$

PROCESE GAUSSIENE (PG)

- exemplu de eșantionare prin PG
 - alegem covarianța, e.g., liniar: $S = \mathbb{R}^d$, $\mu(x) = 0$, $k(x, y) = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$
 - stabilim intervalul de lucru, e.g., $x, y \in [-1, 1]$
 - calculăm matricea de covarianță $c_{ij} = k(x_i, y_j)$
 - eșantionăm cu din Gaussiană cu matricea de covarianță C și medie 0 ca să obținem vectorul z
 - afișăm pentru $x \in [-1, 1]$ valorile din z

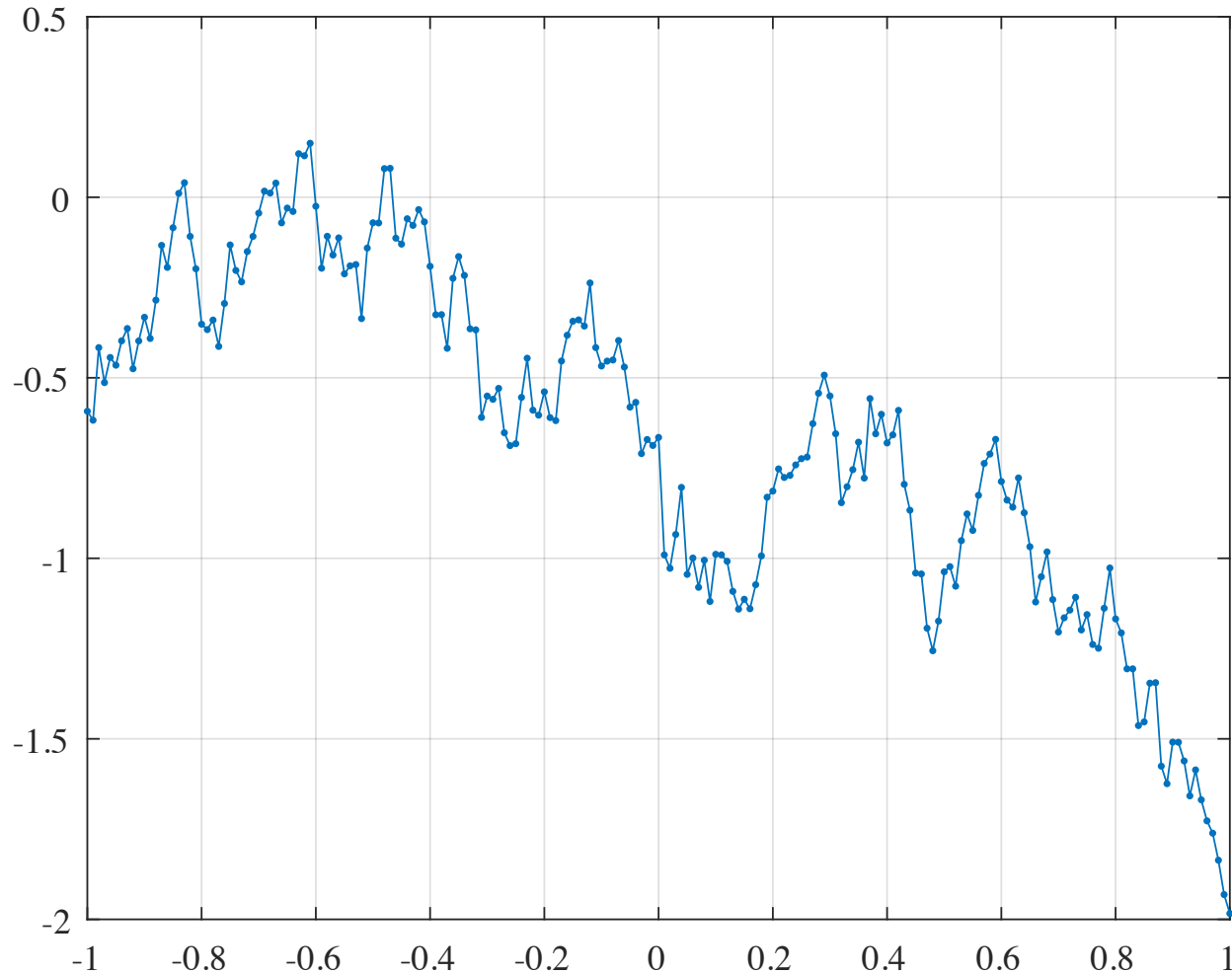
PROCESE GAUSSIENE (PG)

- liniar: $S = \mathbb{R}^d$, $\mu(x) = 0$, $k(x, y) = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$



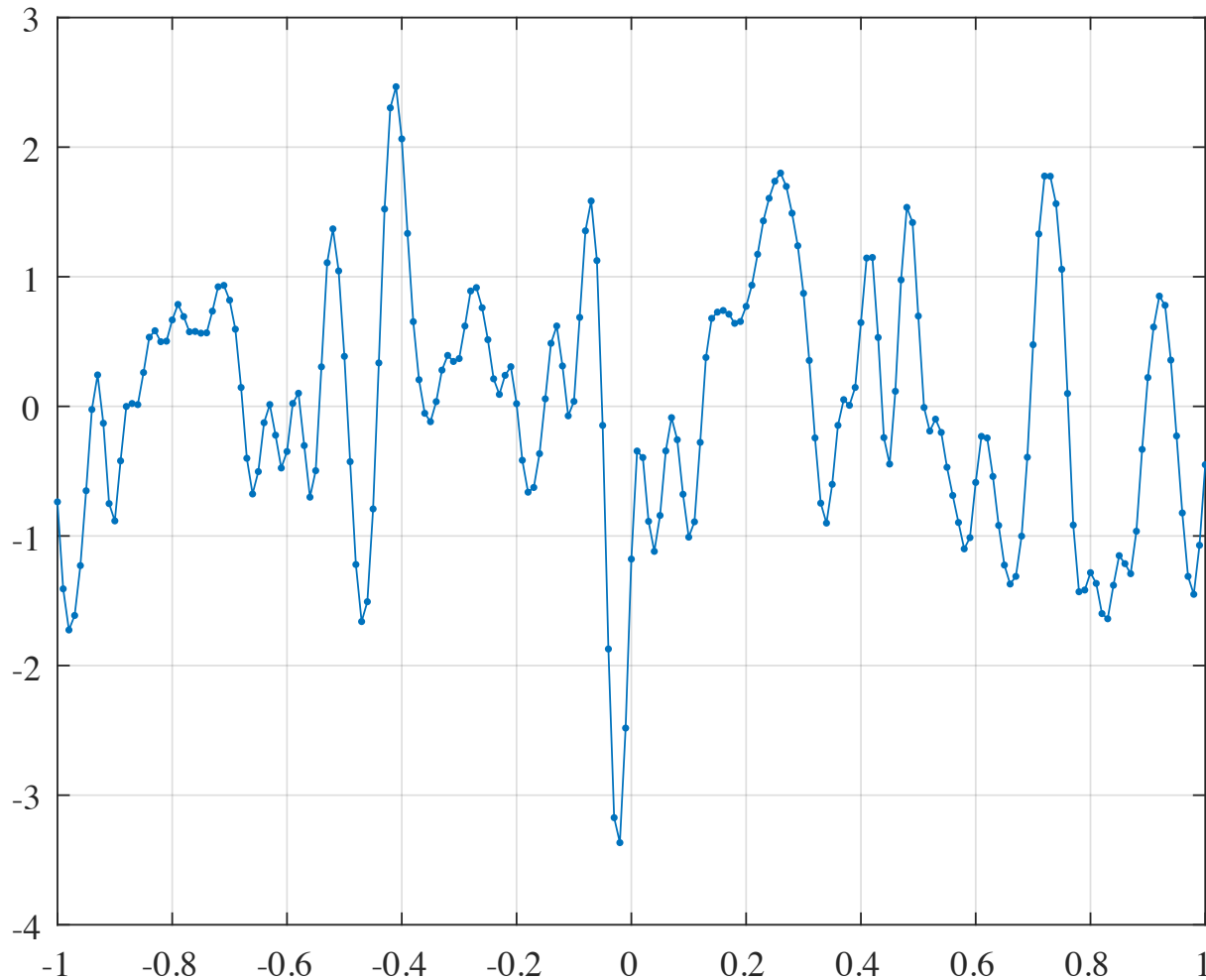
PROCESE GAUSSIENE (PG)

- mișcare Browniană: $S = [0, \infty]$, $\mu(t) = 0$, $k(s, t) = \min\{s, t\}$



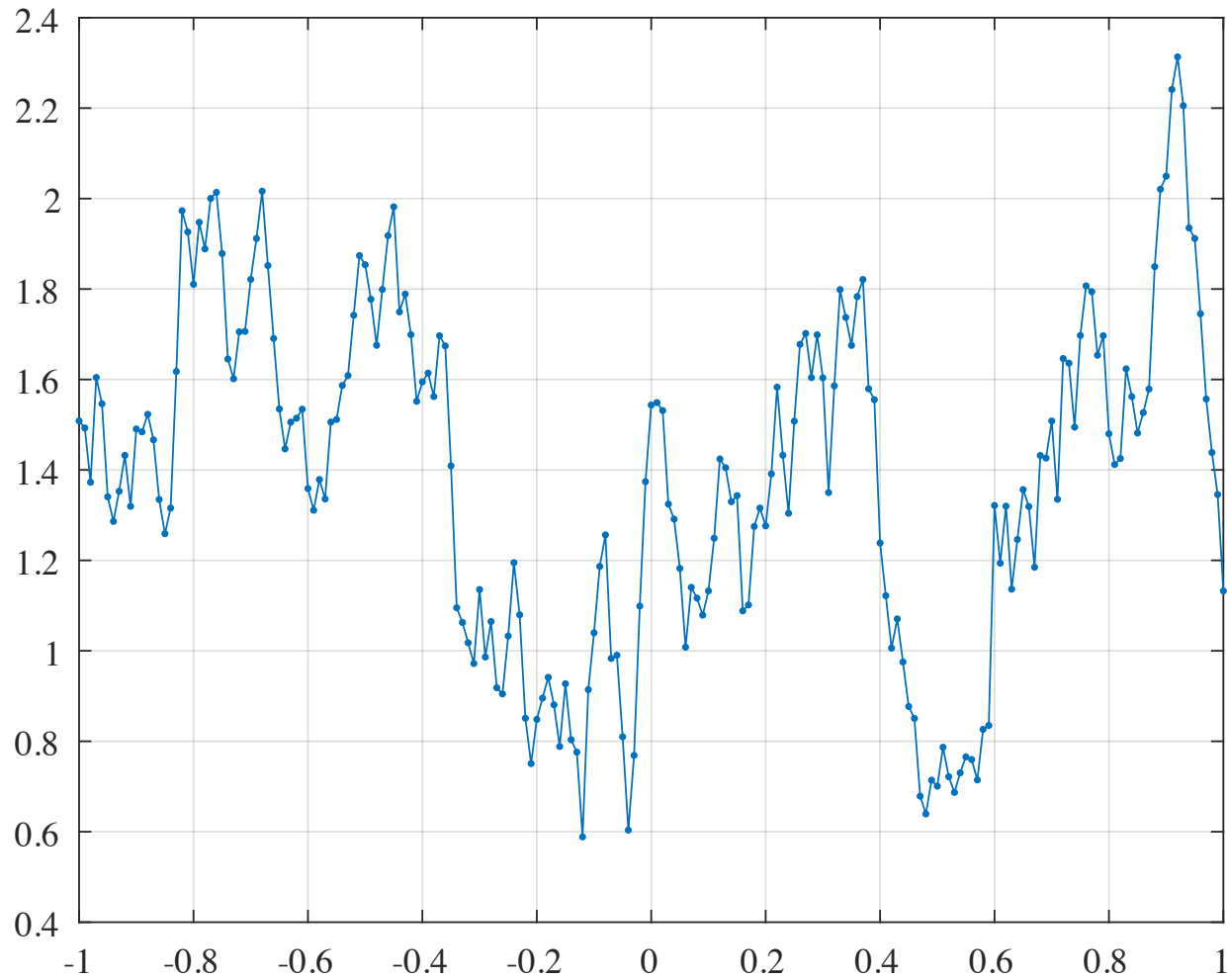
PROCESE GAUSSIENE (PG)

- exponențiala pătrată:
 $S = \mathbb{R}^d$, $\mu(x) = 0$, $k(x, y) = \exp(-\alpha\|x - y\|_2^2)$, $\alpha > 0$



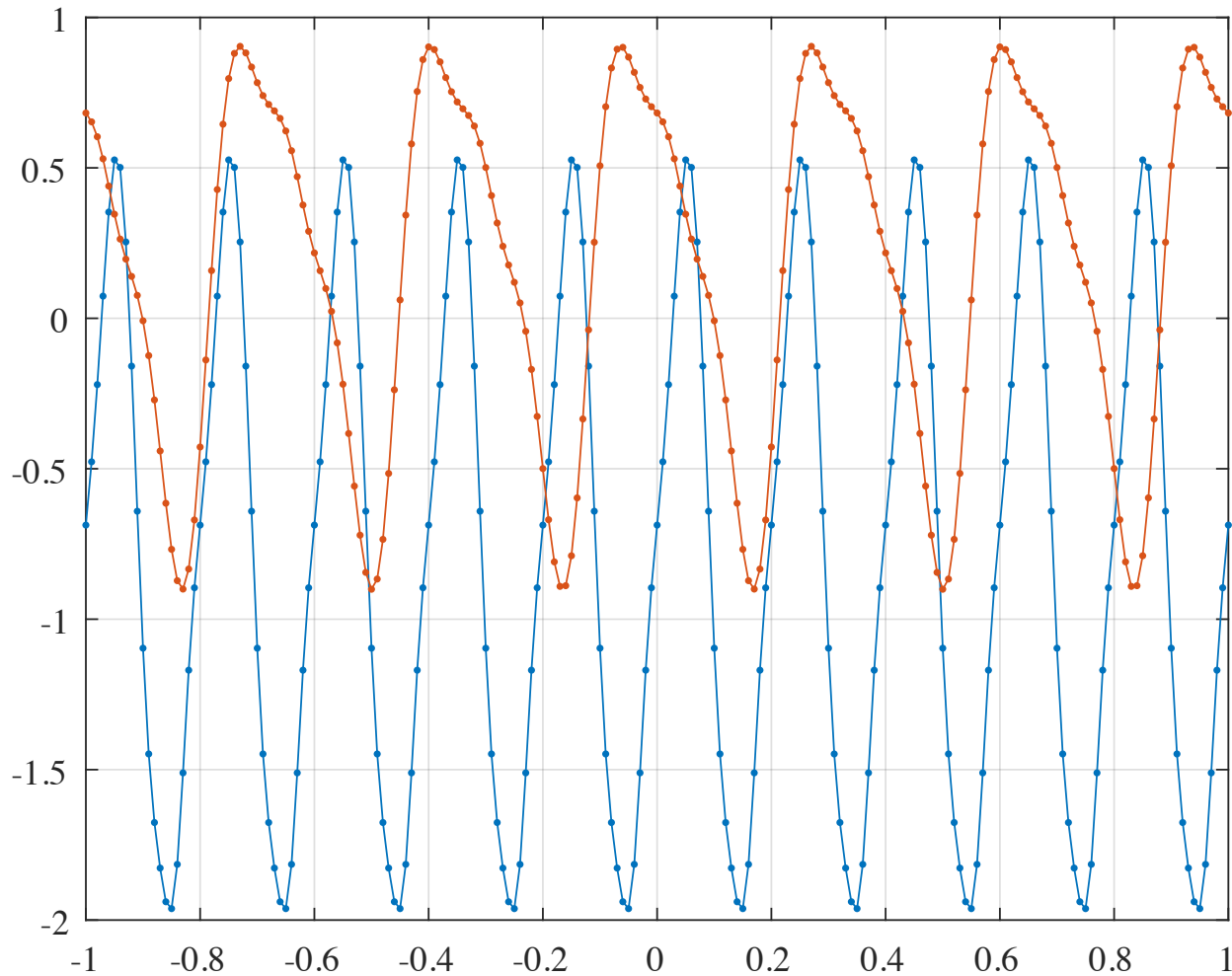
PROCESE GAUSSIENE (PG)

- Ornstein-Uhlenbeck:
 $S = [0, \infty]$, $\mu(t) = 0$, $k(s, t) = \exp(-\alpha |s - t|)$, $\alpha > 0$



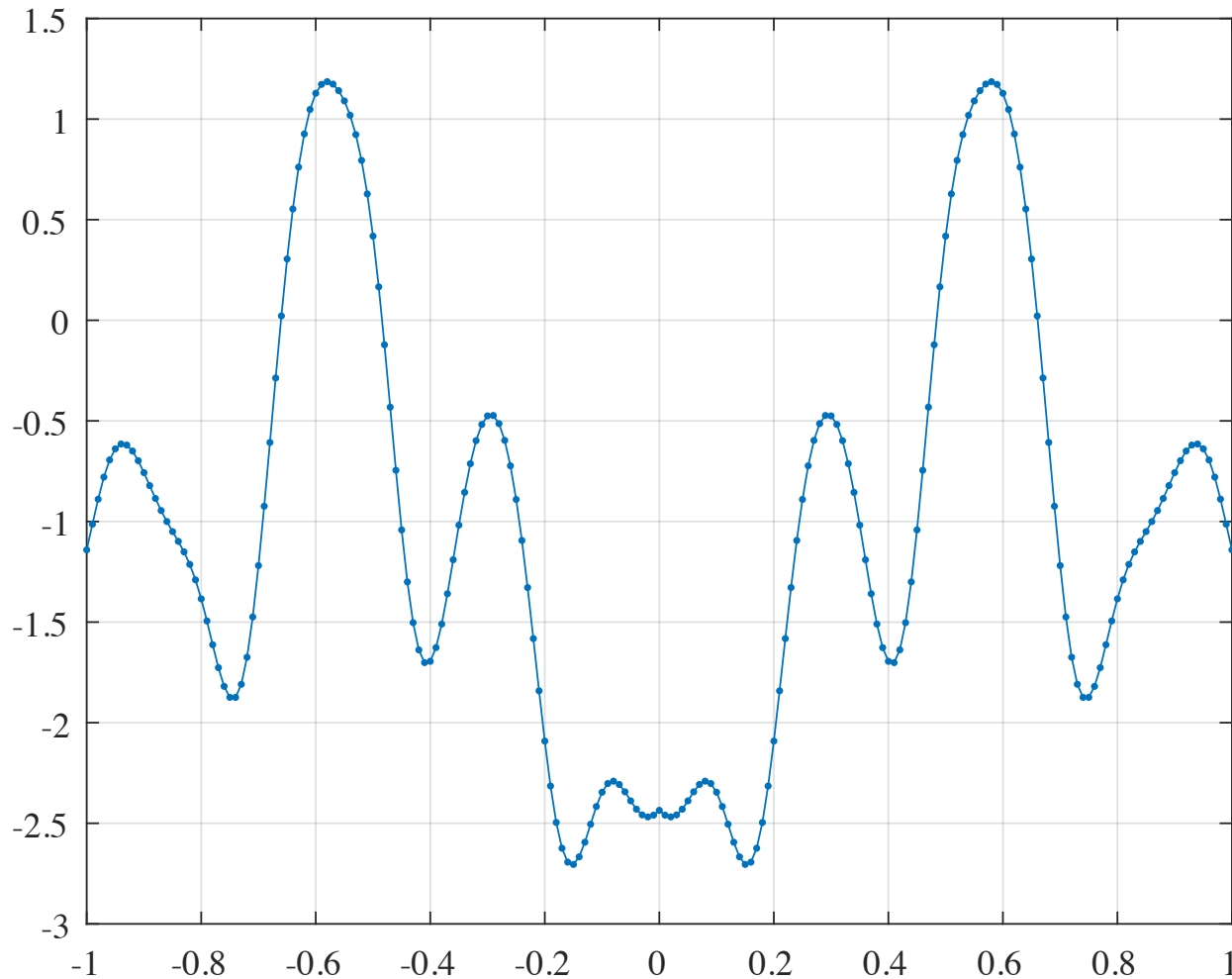
PROCESE GAUSSIENE (PG)

- periodic:
 $S = \mathbb{R}$, $\mu(x) = 0$, $k(x, y) = \exp(-\alpha \sin^2(\beta\pi(x - y)))$, $\alpha, \beta > 0$



PROCESE GAUSSIENE (PG)

- simetric:
 $S = \mathbb{R}$, $\mu(x) = 0$, $k(x, y) = \exp(-\alpha(\min\{|x - y|, |x + y|\})^2)$, $\alpha > 0$



PROCESE GAUSSIENE (PG)

- operații care păstrează proprietatea de pozitivitate (positive definite)
 1. $\alpha k(x, y)$, $\alpha \geq 0$
 2. $k_1(x, y) + k_2(x, y)$
 3. $k_1(x, y) \times k_2(x, y)$
 4. $p(k(x, y))$, pentru orice polinom pozitiv
 5. $\exp(k(x, y))$
 6. $f(x)k(x, y)\overline{f(y)}$, pentru orice funcție
- care din operațiile de mai sus par mai “nenaturale”?

PROCESE GAUSSIENE (PG)

- operații care păstrează proprietatea de pozitivitate (positive definite)
 1. $\alpha k(x, y)$, $\alpha \geq 0$
 2. $k_1(x, y) + k_2(x, y)$
 3. $k_1(x, y) \times k_2(x, y)$
 4. $p(k(x, y))$, pentru orice polinom pozitiv
 5. $\exp(k(x, y))$
 6. $f(x)k(x, y)\overline{f(y)}$, pentru orice funcție
- care din operațiile de mai sus par mai “nenaturale”?
 - pentru că e înmulțirea element cu element între două matrice
 - se numește produsul Hadamard

PROCESE GAUSSIENE (PG)

- una dintre operațiile care păstrează proprietatea de pozitivitate (positive definite): $k_1(x, y) + k_2(x, y)$
- demonstrație:
 - covarianța pentru k_1 este $C = (c_{ij}) = k_1(x_i, x_j)$, $C = A^T A$
 - covarianța pentru k_2 este $D = (d_{ij}) = k_2(x_i, x_j)$, $D = B^T B$
 - produsul este: $E = C \odot D = (e_{ij}) = (c_{ij}d_{ij})$
 - E este simetric, e clar
 - dar este E pozitiv definit?

PROCESE GAUSSIENE (PG)

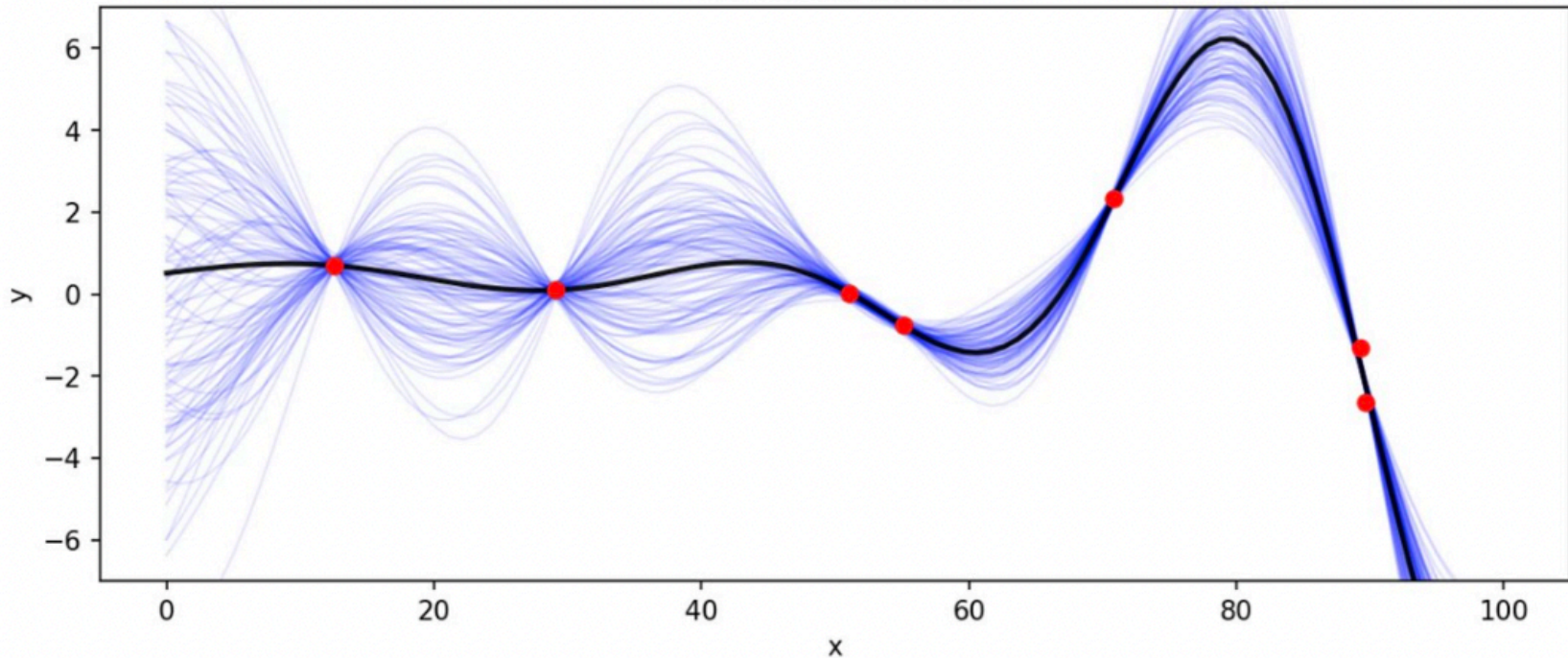
- una dintre operațiile care păstrează proprietatea de pozitivitate (positive definite):
 $k_1(x, y) + k_2(x, y)$
- demonstrație:
 - covarianța pentru k_1 este $C = (c_{ij}) = k_1(x_i, x_j)$, $C = A^T A$
 - covarianța pentru k_2 este $D = (d_{ij}) = k_2(x_i, x_j)$, $D = B^T B$
 - produsul este: $E = C \odot D = (e_{ij}) = (c_{ij}d_{ij})$
 - E este simetric, e clar
 - dar este E pozitiv definit?

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^T \mathbf{E} \mathbf{u} &= \sum_{i,j} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j c_{ij} d_{ij} \\ &= \sum_{i,j} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j (\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j) (\mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_j) \\ &= \sum_{k,\ell} \left(\sum_i \mathbf{u}_i \mathbf{a}_{ik} \mathbf{b}_{i\ell} \right) \left(\sum_j \mathbf{u}_j \mathbf{a}_{jk} \mathbf{b}_{j\ell} \right) \\ &= \sum_{k,\ell} \left(\sum_i \mathbf{u}_i \mathbf{a}_{ik} \mathbf{b}_{i\ell} \right)^2 \geq 0\end{aligned}$$

REGRESIE CU PROCESE GAUSSIENE (RPG)

- ni se dă un set de date
 - $\mathcal{D} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}, x_i \in \mathbb{R}^d, y_i \in \mathbb{R}$
- definim variabilele aleatoare: $Y_1, \dots, Y_n, Y_i = Z_{x_i} + \epsilon_i$
- și impunem structura $Z_x = \mathbf{x}^T \mathbf{w}$ să fie un PG pe $S \equiv \mathbb{R}^d$

Gaussian Process

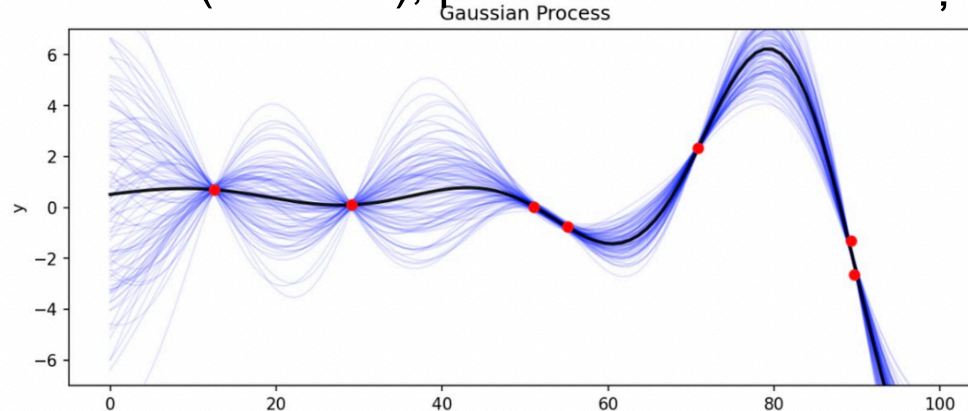


REGRESIE CU PROCESE GAUSSIENE (RPG)

- $Z \in \mathbb{R}^n, Z \sim \mathcal{N}(\mu, K), \epsilon \in \mathbb{R}^n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I})$
- cele două Gaussiene sunt independente
- $Y = Z + \epsilon, Y \sim \mathcal{N}(\mu, K + \sigma^2 \mathbf{I}) = \mathcal{N}(\mu, C)$
- din această Gaussiană, observăm unele elemente iar altele trebuie prezise
- considerăm că datele sunt partiționate în două seturi: ce observăm și ce vrem să prezicem
 - vrem să prezicem pentru setul $\mathcal{A} = \{1, \dots, \ell\}$
 - avem la dispoziție setul $\mathcal{B} = \{\ell + 1, \dots, n\}$
 - variabilele aleatoare sunt partiționate: $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{\mathcal{A}} \\ Y_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$
 - media și matricea de covarianță sunt partiționate:
$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_{\mathcal{A}} \\ \mu_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_{\mathcal{A}\mathcal{A}} & C_{\mathcal{A}\mathcal{B}} \\ C_{\mathcal{B}\mathcal{A}} & C_{\mathcal{B}\mathcal{B}} \end{bmatrix}$$

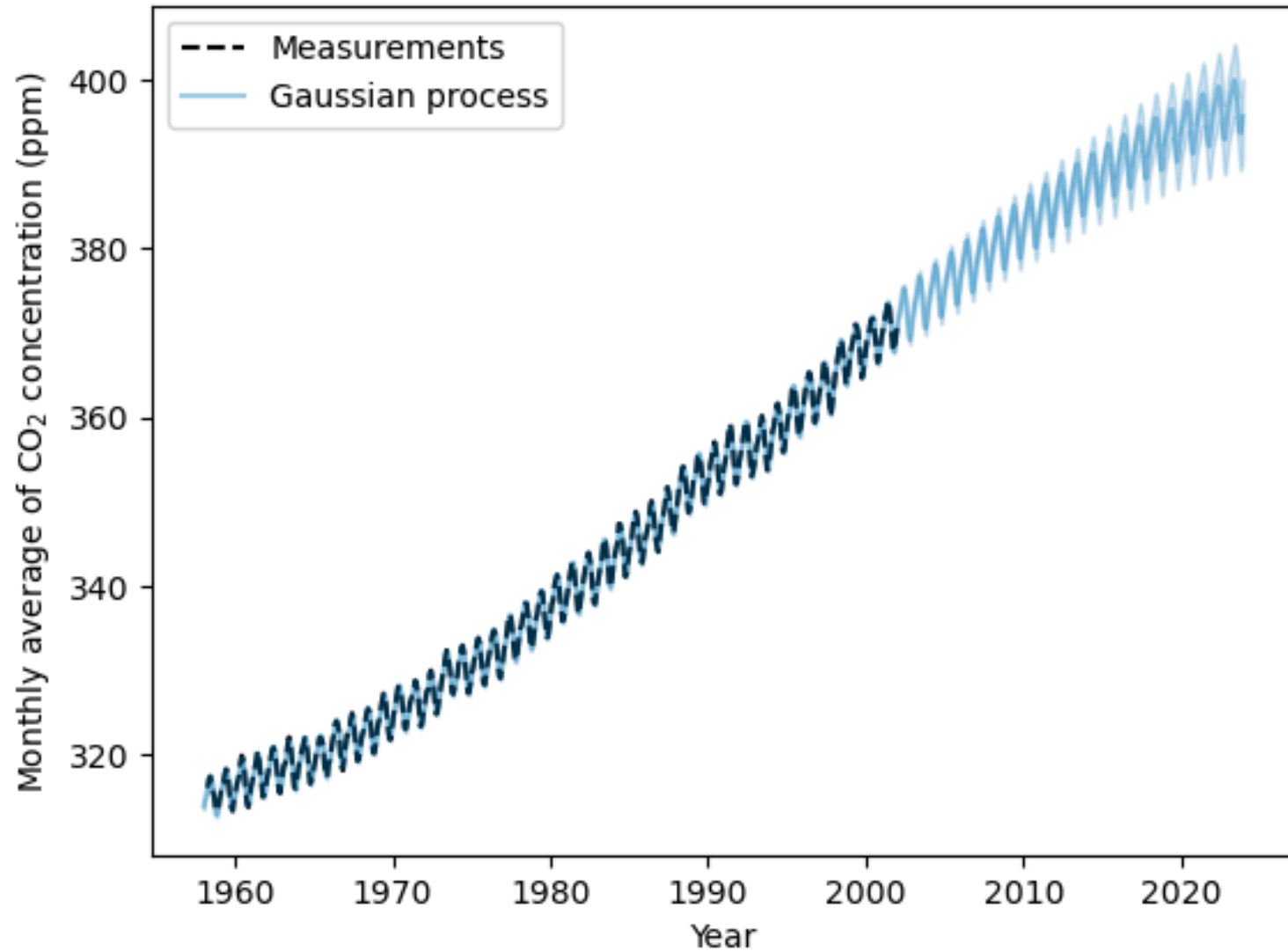
REGRESIE CU PROCESE GAUSSIENE (RPG)

- ideea de bază: o Gaussiană condiționată de o altă Gaussiană este din nou o Gaussiană
- $\text{pdf}(Y_{\mathcal{A}} | Y_{\mathcal{B}} = y_{\mathcal{B}}) = \mathcal{N}(m, D)$
 - $m = \mu_a + C_{\mathcal{A}\mathcal{B}} C_{\mathcal{B}\mathcal{B}}^{-1} (y_{\mathcal{B}} - \mu_{\mathcal{B}})$
 - $D = C_{\mathcal{A}\mathcal{A}} - C_{\mathcal{A}\mathcal{B}} C_{\mathcal{B}\mathcal{B}}^{-1} C_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$
- modelul nostru: $Y_i = Z_{x_i} + \epsilon_i$
- unde avem punctele (setul \mathcal{B}), pe restul intervalului eșantionăm



REGRESIE CU PROCESSE GAUSSIENE (RPG)

Monthly average of air samples measurements
from the Mauna Loa Observatory



REFERINȚE

- Gaussiene condiționale

<https://www.youtube.com/watch?v=31gLA7jPtEc>

- Resurse suplimentare

<https://www.youtube.com/watch?v=4vGiHC35j9s>

<https://www.youtube.com/watch?v=nZovtJ6870U>

DATA VIITOARE

- prezentări de proiecte

